# PART3　重複組合せ

**3**　[1]　$x+y+z=10$ を満たす整数 $x$, $y$, $z$ について，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

(2)　自然数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

[2]　$a$, $b$, $c$, $d$ はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 のうちいずれかの数であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c<d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

**Point Pickup**

異なる $n$ 個($n$ 種類)のものから，重複を許して $r$ 個取る組合せを $n$ 個から $r$ 個取る「重複組合せ」という。$n$ 個から $r$ 個取る重複組合せは

$r$ 個の○ と ($n-1$) 個の｜(仕切り) の順列(同じものを含む順列)

として扱うとよい。

# 第 3 講　PART3　確認問題

**1**　$x+y+z=8$ を満たす 0 以上の整数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

[アイ] 組

**2**　$x+y+z=8$ を満たす自然数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

[ウエ] 組

$a$, $b$, $c$, $d$ はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちいずれかの数であるとする。

**3**　$a<b<c<d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

[オカ] 組

**4**　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

[キクケ] 組

# PART3　重複組合せ

**3**　[1]　$x+y+z=10$ を満たす整数 $x$, $y$, $z$ について，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

(2)　自然数 $x$, $y$, $z$ の組 $(x, y, z)$ は何組あるか。

[2]　$a$, $b$, $c$, $d$ はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 のうちいずれかの数であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c<d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる組 $(a, b, c, d)$ は何組あるか。

[1]　(1)　10 個の○と 2 本の｜(仕切り)を並べ，｜で区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に整数 $x$, $y$, $z$ の値とすればよい。

よって，求める組数は　$\dfrac{12!}{10!2!}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$ (組)

(2)　$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ とすると

$$x+y+z=10 \iff (X+1)+(Y+1)+(Z+1)=10 \iff X+Y+Z=7$$

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1 \iff X+1 \geqq 1,\ Y+1 \geqq 1,\ Z+1 \geqq 1$$

$$\iff X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0$$

よって，求める組数は，7 個の○と 2 本の｜の順列の総数であるから

$$\frac{9!}{7!2!}={}_9\mathrm{C}_2=36 \text{ (組)}$$

(別解)

10 個の○の間 9 カ所のうち，いずれか 2 カ所に｜を 1 本ずつ入れ，区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に自然数 $x$, $y$, $z$ の値とすればよい。

よって，求める組数は　${}_9\mathrm{C}_2=36$ (組)

[2]　(1)　1, 2, 3, 4, 5 の 5 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に $a$, $b$, $c$, $d$ とすればよい。よって，求める組数は　${}_5\mathrm{C}_4=5$ (組)

(2)　1, 2, 3, 4, 5 の 5 個の数から重複を許して 4 個を選び，それを小さい順に $a$, $b$, $c$, $d$ とすればよい。よって，求める組数は，4 個の○と 4 本の｜(仕切り)の順列の総数で

$$\frac{8!}{4!4!}={}_8\mathrm{C}_4=70 \text{ (組)}$$

（別解）

整数 $a$，$b$，$c$，$d$ において

$$a \leqq b \leqq c \leqq d \iff a < b+1 < c+2 < d+3$$

$a=A$，$b+1=B$，$c+2=C$，$d+3=D$ とおくと

$$1 \leqq A < B < C < D \leqq 8,\ A \geqq 1,\ B \geqq 1,\ C \geqq 1,\ D \geqq 1$$

これを満たす$(A,\ B,\ C,\ D)$の組数は，1 ～ 8 の 8 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に $A$，$B$，$C$，$D$ とすればよいから　${}_8\mathrm{C}_4=70$（組）

求める$(a,\ b,\ c,\ d)$の組数は，$(A,\ B,\ C,\ D)$の組数と等しいから　70 組

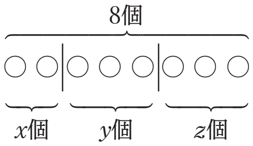
# 第 3 講　PART3　確認問題 解答

## 1

**[正解]** アイ：45

**[解説]**

8 個の○と 2 本の｜(仕切り)を並べ，｜で区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に整数 $x$, $y, z$ の値とすればよい。




よって，求める組数は

$$\frac{10!}{8!2!} = {}_{10}\mathrm{C}_2 = 45\ (組)$$ [A]

[A]　同じものを含む順列
$n$ 個のもののうち，$p$ 個，$q$ 個，$r$ 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら $n$ 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ただし　$p+q+r+\cdots\cdots=n$

## 2

**[正解]** ウエ：21

**[解説]**

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とすると，

$x=X+1$，$y=Y+1$，$z=Z+1$ より

$$x+y+z=8$$

$$\Longleftrightarrow (X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$$

$$\Longleftrightarrow X+Y+Z=5$$

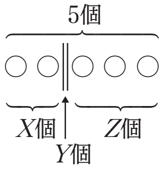
$x$，$y$，$z$ は自然数であるから

$$x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$$

$$\Longleftrightarrow X+1 \geqq 1,\ Y+1 \geqq 1,\ Z+1 \geqq 1$$

$$\Longleftrightarrow X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0$$

よって，求める組数は，5 個の○と 2 本の｜(仕切り)の順列の総数であるから



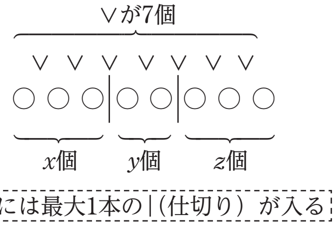

$$\frac{7!}{5!2!}={}_7C_2=\mathbf{21}\ (組)$$

(別解)

8 個の○の間 7 カ所のうち，いずれか 2 カ所に｜(仕切り)を 1 本ずつ入れ，区切られた 3 カ所にある○の個数を左から順に自然数 $x, y, z$ の値とすればよい。

よって，求める組数は　${}_7C_2=\mathbf{21}$ (組) [B]

> [B]　7カ所のうちから，2カ所を選ぶ組合せとして読みかえる。




## 3

**[正解]** オカ：35

**[解説]**

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の 7 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に $a$，$b$，$c$，$d$ とすればよい。 [C]

> [C]　組合せとして読みかえる。

よって，求める組数は　${}_7C_4=\mathbf{35}$ (組)

## 4 [正解] キクケ：210

**[解説]**

1，2，3，4，5，6，7 の 7 個の数から重複を許して 4 個を選び，それを小さい順に $a$，$b$，$c$，$d$ とすればよい。 [D]

よって，求める組数は，4 個の○と 6 本の｜(仕切り) の順列の総数で

$$\frac{10!}{4!6!} = {}_{10}C_4 = \mathbf{210}\ (組)$$

(別解)

整数 $a$，$b$，$c$，$d$ において

$$a \leqq b \leqq c \leqq d$$

$$\Longleftrightarrow a < b+1 < c+2 < d+3$$

ここで，$a = A$，$b+1 = B$，$c+2 = C$，$d+3 = D$ とおくと

$$1 \leqq A < B < C < D \leqq 10,$$

$$A \geqq 1,\ B \geqq 1,\ C \geqq 1,\ D \geqq 1$$

これを満たす $(A, B, C, D)$ の組数は，1 ～ 10 の 10 個の数から異なる 4 個を選び，それを小さい順に $A$，$B$，$C$，$D$ とすればよいから

$$_{10}C_4 = 210\ (組)$$

求める $(a, b, c, d)$ の組数は，$(A, B, C, D)$ の組数と等しいから　**210 組**

> [D]　重複組合せ
> 異なる $n$ 個 ($n$ 種類) のものから，重複を許して $r$ 個取る組合せを，$n$ 個から $r$ 個取る「重複組合せ」といい，
> 　$r$ 個の○と $(n-1)$ 個の｜（仕切り）
> 　の順列（同じものを含む順列）
> として扱えばよい。